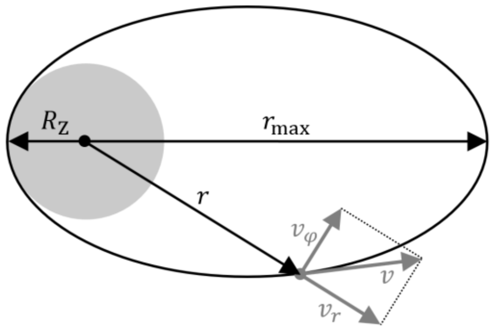
Zadanie 1

1)

Zasada zachowania energii mechanicznej:



$$e = \frac{E}{m} = -\frac{GM_Z}{r} + \frac{v_r^2 + v_\varphi^2}{2} = \mathrm{const}, \qquad (1)$$

gdzie na początku ruchu mamy:

$$e = -\frac{GM_Z}{R_Z} + \frac{1}{2}\left(v_0 + \frac{2\pi R_Z}{T_Z}\right)^2, \qquad (2)$$

Dla orbity zamkniętej zachodzi $e < 0$ (lub równoważnie: $v_0 + \frac{2\pi R_Z}{T_Z} < \sqrt{\frac{2GM_Z}{R_Z}}$).

Zasada zachowania momentu pędu:

$$j = \frac{J}{m} = v_\varphi r = \mathrm{const}, \qquad (3)$$

gdzie na początku ruchu mamy:

$$j = \left(v_0 + \frac{2\pi R_Z}{T_Z}\right) R_Z. \qquad (4)$$

W skrajnych odległościach mamy $v_r = 0$, natomiast z równania (3) mamy $v_\varphi = j/r$, co sprowadza równanie (1) do postaci:

$$er^2 + GM_Z r - \frac{j^2}{2} = 0. \qquad (5)$$

Ma ono rozwiązania:

$$r_1 = \frac{-GM_Z - \sqrt{(GM_Z)^2 + 2ej^2}}{2e}, \qquad r_2 = \frac{-GM_Z + \sqrt{(GM_Z)^2 + 2ej^2}}{2e}. \qquad (6)$$

Dla $e < 0$ mamy $r_2 < r_1$, gdzie $r_2 = R_Z$ jest odległością minimalną od środka Ziemi, natomiast $r_1 = r_{max}$ jest odległością maksymalną.

Szukana maksymalna wysokość kapsuły nad powierzchnią Ziemi (poniższe zapisy końcowego wyniku są równoważne):

$$h_{max} = \underbrace{r_{max}}_{r_1} - \underbrace{R_Z}_{r_2} = \underbrace{-\frac{\sqrt{(GM_Z)^2 + 2ej^2}}{e}}_{r_1 - r_2} = \underbrace{\frac{-GM_Z}{e}}_{r_1 + r_2} - \underbrace{2R_Z}_{2r_2}. \qquad (7)$$

2)

Półoś wielka orbity eliptycznej:

$$a = \frac{r_1 + r_2}{2} = \frac{-GM_Z}{2e}. \quad (8)$$

Zgodnie z III prawem Keplera:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{(T')^2}{(a')^3}, \quad (9)$$

gdzie T' i a' to okres i półoś wielka dla dowolnej innej orbity. Rozważmy najprostszy ruch – po okręgu o stałym promieniu $r = R_Z$:

$$a' = R_Z, \qquad T' = \frac{2\pi R_Z}{\sqrt{GM_Z/R_Z}} = 2\pi\sqrt{\frac{R_Z^3}{GM_Z}}. \quad (10)$$

Szukany okres wynikający z równań (9) i (10):

$$T = T'\sqrt{\left(\frac{a}{a'}\right)^3} = 2\pi\sqrt{\frac{a^3}{GM_Z}}. \quad (11)$$

3)

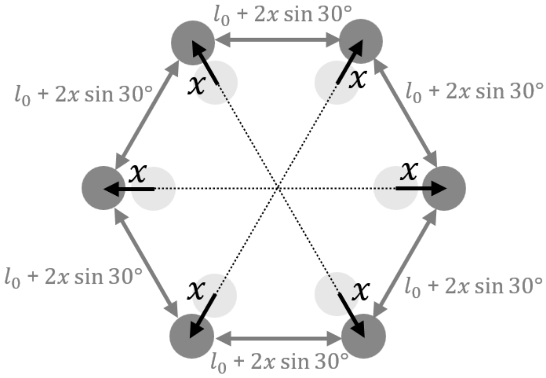
Powierzchnia orbity może zostać obliczona na podstawie II prawa Keplera:

$$S = \frac{1}{2}\underbrace{v_\varphi r}_{j=\text{const}} \cdot T = \frac{1}{2}\left(v_0 + \frac{2\pi R_Z}{T_Z}\right) R_Z \cdot T. \quad (12)$$

Zadanie 2

a)

Rozważmy jednakowe wychylenia atomów o odległość x zgodnie z kierunkami wektorów prędkości początkowych. Z uwagi na symetrię, kąty nachylenia sprężyn nie ulegają zmianie (warunkiem wystarczającym byłby też fakt małych wychyleń atomów).

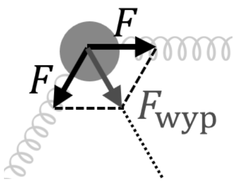


Każda sprężyna wydłuża się o:

$$\Delta x = 2 \cdot x \cdot \sin 30° = x.$$

Każda sprężyna działa na masy uczepione na swoich końcach siłami o wartościach:

$$F = k \cdot \Delta x = k \cdot x,$$



Na każdą masę działa siła wypadkowa (przeciwnie do wychylenia masy):

$$F_{\text{wyp}} = 2 \cdot F \cdot \cos 60° = k \cdot x.$$

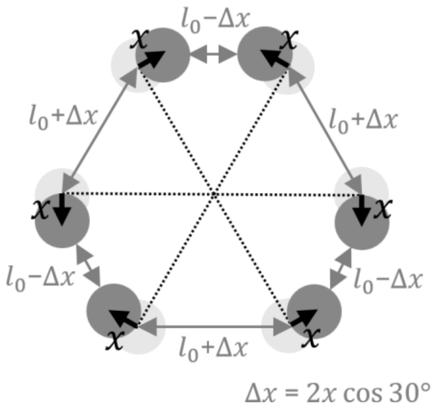
Przyspieszenie każdej masy jest skierowane przeciwnie do przemieszczenia i ma wartość:

$$a = \frac{k}{m} x.$$

Zatem każdy atom będzie poruszał się jak oscylator harmoniczny o częstości kołowej $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ oraz okresie $T_1 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$, równolegle do początkowego wychylenia (od i do środka sześciokąta), zgodnie w fazie. Amplituda drgań każdego atomu, na podstawie efektywnej zasady zachowania energii, wynosi $A_1 = \sqrt{\frac{m}{k}}\, v_0$.

b)

Rozważmy jednakowe wychylenia atomów o odległość x zgodnie z kierunkami wektorów prędkości początkowych. Z uwagi na symetrię, kąty nachylenia sprężyn nie ulegają zmianie (wystarcza też fakt małych wychyleń atomów).



Połowa sprężyn wydłuża się o długość:

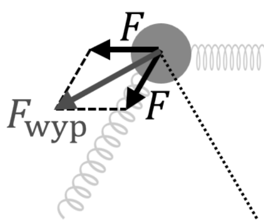
$$\Delta x = 2 \cdot x \cdot \cos 30° = x\sqrt{3},$$

natomiast druga połowa sprężyn skraca się o tę długość (zmiany są naprzemienne w kolejnych bokach sześciokąta).

Każda sprężyna działa na masy uczepione na swoich końcach siłami o wartościach:

$$F = k \cdot \Delta x = kx\sqrt{3},$$

gdzie siły są skierowane naprzemiennie od i do środków sprężyn.



Na każdą masę działa siła wypadkowa (przeciwnie do przemieszczenia):

$$F_{\text{wyp}} = 2 \cdot F \cdot \cos 30° = 2 \cdot kx\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 3kx.$$

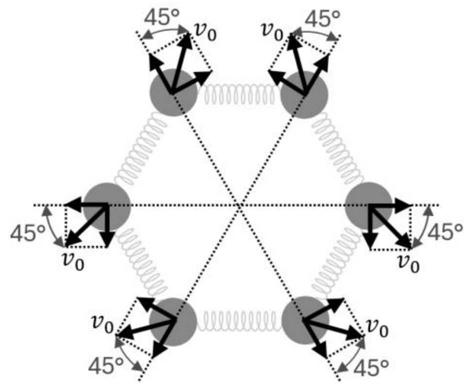
Przyspieszenie każdej masy jest skierowane przeciwnie do przemieszczenia i ma wartość:

$$a = \frac{3k}{m}x.$$

Zatem każdy atom będzie poruszał się jak oscylator harmoniczny o częstości kołowej $\omega_2 = \sqrt{\frac{3k}{m}}$ oraz okresie $T_2 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}$, równolegle do początkowego wychylenia, zaczynając od zwrotu zgodnego z prędkością początkową. Amplituda drgań każdego atomu, na podstawie efektywnej zasady zachowania energii, wynosi $A_2 = \sqrt{\frac{m}{3k}}v_0$.

c)

Zauważmy, że przedstawione prędkości początkowe każdej masy są superpozycją (złożeniem) prędkości początkowych rozważonych w scenariuszach a) i b), o ile w tych dwóch scenariuszach rozważymy prędkości początkowe o wartościach $v_0/\sqrt{2}$ zamiast v_0. To wskazuje, że poprawnym rozwiązaniem równań dynamiki z takimi warunkami początkowymi mogłaby być superpozycja drgań rozważonych w scenariuszach a) i b), ale z $\sqrt{2}$ razy mniejszymi amplitudami.



Jest to rzeczywiście prawda, ponieważ siły sprężystości są liniowo zależne od wydłużeń sprężyn, a kąty nachylenia sprężyn nie zmieniają się (z uwagi na małe wychylenia). Zatem gdy pojedyncza masa wykonuje ruch będący sumą dwóch prostopadłych drgań a) i b), to siła działająca na tę masę jest sumą prostopadłych sił odpowiadających tym drganiom – prostopadłe drgania „nie przeszkadzają" sobie.

Zatem obserwowany ruch będzie złożeniem drgań opisanych w scenariuszach a) i b), z tą samą fazą obu drgań w chwili początkowej, jednak z amplitudami mniejszymi o $\sqrt{2}$ razy.

Zadanie 3

1)

Dla obwodu a) natężenie prądu przepływającego przez punkty A i B wynosi:

$$I^{(\mathrm{a})} = J - \frac{U_{\mathrm{AB}}^{(\mathrm{a})}}{R}, \quad (1)$$

gdzie $U_{\mathrm{AB}}^{(\mathrm{a})}$ jest napięciem między punktami A i B, natomiast $U_{\mathrm{AB}}^{(\mathrm{a})}/R$ jest natężeniem prądu przepływającego przez rezystor R. Wyznaczając napięcie $U_{\mathrm{AB}}^{(\mathrm{a})}$ z równania (1):

$$U_{\mathrm{AB}}^{(\mathrm{a})} = RJ - R \cdot I^{(\mathrm{a})}. \quad (2)$$

2)

Dla układu b) możemy zapisać zależność:

$$U_{\mathrm{AB}}^{(\mathrm{b})} = E - r \cdot I^{(\mathrm{b})}. \quad (3)$$

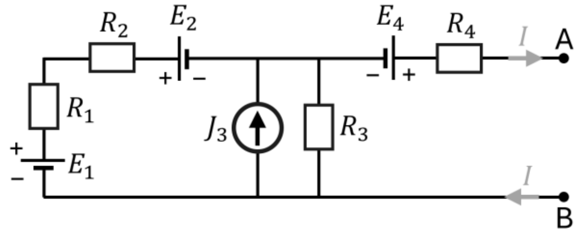
Układy a) i b) są równoważne, jeżeli zachodzi następująca równość współczynników funkcji liniowych (2) i (3):

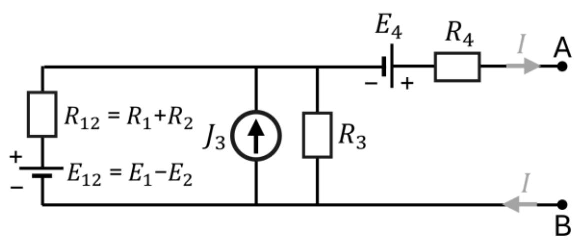
$$E = RJ, \quad r = R. \quad (4)$$

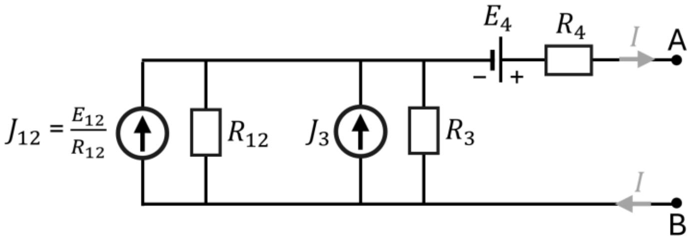
3)

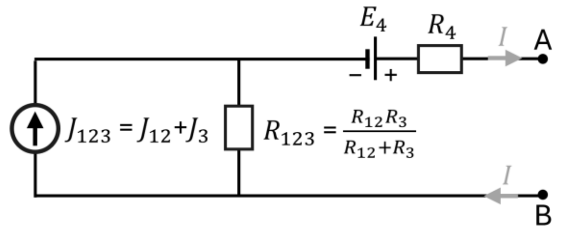
<u>**Sposób 1**</u>

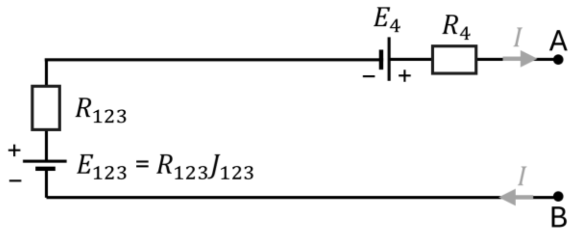
Na podstawie praw Kirchhoffa oraz twierdzenia udowodnionego w podpunkcie 2) zadania, następujące obwody są sobie równoważne:

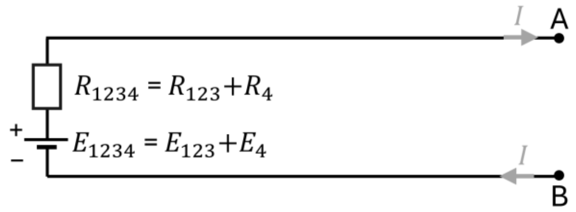












Na podstawie ostatniego (najprostszego) układu napięcie między punktami A i B wynosi:

$$
\begin{aligned}
U_{\mathrm{AB}} &= E_{1234} - R_{1234} I \\
&= E_{123} + E_4 - (R_{123} + R_4) I \\
&= R_{123} J_{123} + E_4 - (R_{123} + R_4) I \\
&= \frac{R_{12} R_3}{R_{12} + R_3} \left(\frac{E_{12}}{R_{12}} + J_3 \right) + E_4 - \left(\frac{R_{12} R_3}{R_{12} + R_3} + R_4 \right) I \\
&= \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \left(\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} + J_3 \right) + E_4 - \left(\frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 \right) I
\end{aligned}
$$

<u>Sposób 2</u>

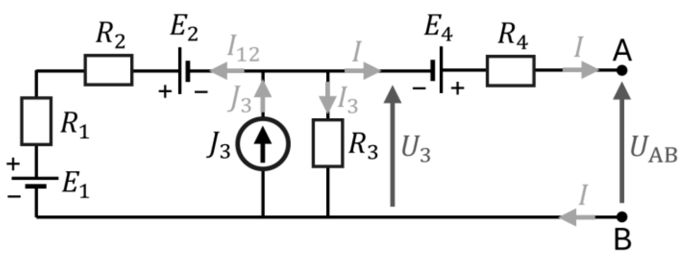
Prawa Kirchhoffa dla oznaczeń jak na rysunku (niewiadome są U_{AB}, U_3, I_3, I_{12}):

$$U_3 + E_4 - R_4 I = U_{\mathrm{AB}},$$

$$E_1 + (R_1 + R_2) I_{12} - E_2 = U_3,$$

$$R_3 I_3 = U_3,$$

$$J_3 = I_{12} + I_3 + I.$$



Rozwiązanie powyższego układu równań daje szukane napięcie:

$$U_{\mathrm{AB}} = \frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} \left(\frac{E_1 - E_2}{R_1 + R_2} + J_3 \right) + E_4 - \left(\frac{(R_1 + R_2) R_3}{R_1 + R_2 + R_3} + R_4 \right) I.$$

Zadanie 4

Koncepcja jakościowa:

Zauważmy że pojedynczy walec może zachowywać się jak gruba soczewka skupiająca w jednym wymiarze (tak jakby z soczewki okrągłej „wyciąć” cienki pasek przechodzący przez oś optyczną soczewki). Taki walec będzie skupiał światło do „ogniska” w formie odcinka. Spodziewamy się (np. w myśl z analizy wymiarowej) że ogniskowa takiej walcowej soczewki będzie wprost proporcjonalna do promienia walca. Dysponując dwoma walcami o różnych promieniach i umieszczając je prostopadle do siebie, jeden za drugim, możliwe jest jednoczesne skupienie światła w dwóch wymiarach – pod warunkiem że „ogniska” obu walców (w formie odcinków) znajdą się w jednej płaszczyźnie.

Koncepcja ilościowa:

Zgodnie ze wskazówką w treści zadania, walec o promieniu R i współczynniku załamania n skupia światło w „ognisko” (w kształcie odcinka), dokładnie tak samo jak cienka soczewka skupiająca umieszczona w środku walca. Zdolność skupiająca tej efektywnej soczewki wynosi:

$$Z = 2Z_1\left(1 - \frac{R}{n}Z_1\right),$$

gdzie Z_1 to zdolność skupiająca pojedynczej cienkiej soczewki wypukło-płaskiej, równa:

$$Z_1 = \frac{n-1}{R}.$$

Na tej podstawie zdolność skupiająca efektywnej soczewki wynosi:

$$Z = 2\frac{n-1}{R}\left(1 - \frac{R}{n}\cdot\frac{n-1}{R}\right) = 2\frac{n-1}{nR},$$

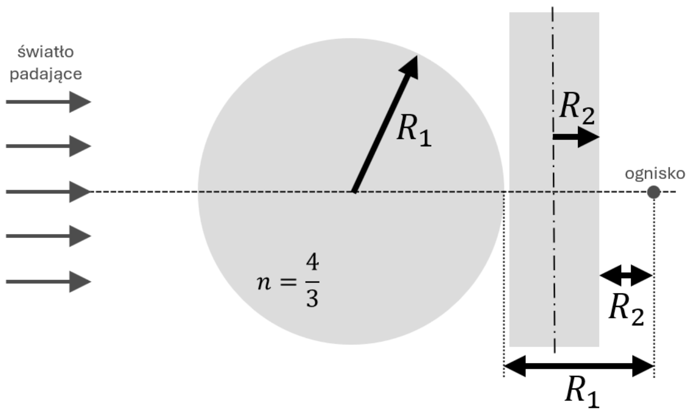
co dla $n = \frac{4}{3}$ daje ogniskową tej efektywnej soczewki (mierzoną od środka walca):

$$f = \frac{1}{Z} = \frac{n}{2(n-1)}R = 2R.$$

Zatem ognisko dla walca wypełnionego ośrodkiem o współczynniku załamania $n = \frac{4}{3}$ znajduje się w odległości R od tej strony walca po której światło go opuszcza.

Prawidłowe ustawienie układu:

Większy walec (o promieniu R_1) należy ustawić bliżej Słońca, co wytworzy „ognisko” w formie odcinka w odległości R_1 od tylnego brzegu walca. Mniejszy walec (o promieniu R_2) należy ustawić między większym walcem i jego ogniskiem, obracając go o kąt 90° względem osi optycznej (łączącej Słońce i docelowe ognisko), tak aby tylny brzeg tego walca był w odległości R_2 od żądanego ogniska (patrz rysunek).



Jest to jednak możliwe wyłącznie wtedy, gdy mniejszy promień (tj. R_2) jest na tyle mały, żeby na długości R_1 zmieścić całą średnicę $2R_2$ oraz dodatkowo odległość R_2, czyli gdy zachodzi nierówność:

$$R_1 > 3R_2.$$